2Ш

УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60

Властивості відношень логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів

S.S. Shkilnak
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Ukraine, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 60

Properties of Logical Consequence Relations in Logics of Quasi-Ary Predicates

С.С. Шкильняк
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
Украина, 01601, г. Киев, ул. Владимирская, 60

Свойства отношений логического следствия в логиках квазиарных предикатов

У статті досліджено відношення логічного наслідку для множин формул у чистих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Основна увага приділена вивченню властивостей відношень, пов'язаних з елімінацією кванторів. Для опису таких властивостей використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних.
Ключові слова: логіка, предикат, квантор, логічний наслідок.

Logical consequence relation for sets of formulas is studied for pure first-order composition-nominative logics of partial single-valued, total and partial multiple-valued predicates. We focus on the properties of relations concerned with quantifier elimination. Special variable definedness predicates are used for description of such properties.
Key words: logic, predicate, quantifier, logical consequence.

В статье исследованы отношения логического следствия для множеств формул в чистых первопорядковых композиционно-номинативных логиках частичных однозначных, тотальных неоднозначных и частичных неоднозначных предикатов. Основное внимание уделено изучению свойств отношений, связанных с элиминацией кванторов. Для описания таких свойств использованы специальные предикаты, определяющие наличие значений для переменных.
Ключевые слова: логика, предикат, квантор, логическое следствие.

Вступ

Поняття і методи математичної логіки доводять свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики й програмування [1]. Водночас таке використання вимагає зробити логіку ближчою і адекватнішою до потреб програмування й моделювання. В основі різноманітних прикладних логічних систем зазвичай лежить класична логіка предикатів. Проте така логіка має принципові обмеження, що ускладнює її використання. Тому першочерговою постає проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Природною основою такої побудови є спільний

для логіки й програмування композиційно-номінативний підхід. Логіки, побудовані на його базі, названо композиційно-номінативними (КНЛ), вони досліджені, зокрема, в роботах [2-7].

Поняття логічного слідування є центральним поняттям логіки. Формалізація логічного слідування в КНЛ квазіарних предикатів за допомогою відношень логічного наслідку запропонована в [3]. Досліджено [3-6] такі «природні» відношення: «істинністний» $|=_T$, «хибнісний» $|=_F$, «сильний» $|=_{TF}$, «неспростовнісний» $|=_{Cl}$, «насичений» $|=_{Cm}$ логічні наслідки. Усі вони збігаються в класичній логіці, яка є логікою тотальних однозначних предикатів. Для логік однозначних часткових предикатів (неокласична семантика) можна розглядати відношення $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$. Традиційним для цих логік є $|=_{Cl}$. Для логік тотальних неоднозначних предикатів (пересичена семантика, дуальна до неокласичної) розглядаємо $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cm}$. Для логік часткових неоднозначних предикатів (загальна семантика) маємо єдине змістовне відношення $|=_{TF}$, із ним збігаються $|=_T$ та $|=_F$. Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови числень секвенційного типу.

Метою даної статті є дослідження відношень логічного наслідку для множин формул в чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Основна увага приділена вивченню властивостей цих відношень, пов'язаних з елімінацією кванторів. Для опису таких властивостей використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2-6]. Будемо дотримуватись позначень роботи [6], продовженням якої є дана стаття.

Відношення логічного наслідку

Для полегшення читання наведемо основні визначення та позначення.

Область істинності й область хибності V-квазіарного предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ – це множини $T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P(d)\}$ та $F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P(d)\}$.

Якщо P однозначний, то $T(P) \cap F(P) = \varnothing$; якщо P тотальний, то $T(P) \cup F(P) = {}^VA$.

Мова ЧКНЛ визначається так. Алфавіт мови: символи $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ базових композицій; множини Ps предикатних символів (сигнатура мови) та V предметних імен.

Множина Fr формул мови ЧКНЛ визначається індуктивно.

1) Кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули атомарні.

2) Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Моделями мови ЧКНЛ є алгебраїчні системи з доданою сигнатурою вигляду $((A, Pr^A), I)$. Тут Pr^A – клас V-квазіарних предикатів над A, а тотальне однозначне $I : Ps \to Pr^A$ задає відображення інтерпретації формул $J : Fr \to Pr^A$:

1) $J(p) = I(p)$ для кожного $p \in Ps$.

2) $J(\neg\Phi) = \neg(J(\Phi))$, $J(\vee\Phi\Psi) = \vee(J(\Phi), J(\Psi))$, $J(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(J(\Phi))$, $J(\exists x\Phi) = \exists x(J(\Phi))$.

Предикат $J(\Phi)$ позначаємо Φ_A.

Характерною ознакою логіки квазіарних предикатів є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Це веде до того, що для цих логік вже невірні [3-6] деякі важливі закони класичної логіки. Тому при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Це робимо за допомогою запропоно-

ваних в [7] спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за предметними іменами предикатів ε*z*, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем *z*. Називатимемо їх індикаторами наявності значення для предметного імені.

Предикати-індикатори ε*z* визначаємо так:

$T(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in{}^{V}A \mid z\notin asn(d)\}$;

$F(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in{}^{V}A \mid z\in asn(d)\}$.

Теорема 1. $T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))\cap F(\varepsilon y)\subseteq T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$ та $F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))\cap F(\varepsilon y)\subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$.

Доведення. Нехай $d\in T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))\cap F(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $d\in T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$. Нехай $d(y)=a$, тоді $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)=d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in T(P)$ для такого $a\in A$, звідки $r^{\bar{u}}_{\bar{v}}(d)\in T(\exists xP)$, тому $d\in T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$. Отже, $T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))\cap F(\varepsilon y)\subseteq T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$.

Нехай $d\in F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))\cap F(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $d\in F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))$. Із останнього маємо $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in F(\exists xP)$, тому $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto b\in F(P)$ для всіх $b\in A$. Нехай $d(y)=a$, для такого $a\in A$ маємо $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a=d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)\in F(P)$, звідки $d\in F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$. Отже, $F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xP))\cap F(\varepsilon y)\subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(P))$.

Наслідок 1. $T(R^{x}_{y}(P))\cap F(\varepsilon y)\subseteq T(\exists xP)$ та $F(\exists xP)\cap F(\varepsilon y)\subseteq F(R^{x}_{y}(P))$.

Далі розглядаємо ЧКНЛ, в яких мови розширені за допомогою множини символів предикатів-індикаторів $\{\varepsilon x \mid x\in V\}$. Такі розширені логіки назвемо ε-ЧКНЛ, вони задають окремий підрівень кванторного рівня із базовими композиціями ¬, ∨, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, ∃*x*, ε*x*.

Задамо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на моделі мови *A*:

1) «істиннісний» наслідок $_A|\!=_T$: $\Phi\ {}_A|\!=_T\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A)\subseteq T(\Psi_A)$;

2) «хибнісний» наслідок $_A|\!=_F$: $\Phi\ {}_A|\!=_F\Psi \Leftrightarrow F(\Psi_A)\subseteq F(\Phi_A)$;

3) «сильний» наслідок $_A|\!=_{TF}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A)\subseteq T(\Psi_A)$ та $F(\Psi_A)\subseteq F(\Phi_A)$;

4) «неспростовнісний» наслідок $_A|\!=_{Cl}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{Cl}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A)\cap F(\Psi_A)=\varnothing$;

5) «насичений» наслідок $_A|\!=_{Cm}$: $\Phi\ {}_A|\!=_{Cm}\Psi \Leftrightarrow F(\Phi_A)\cup T(\Psi_A)=D$.

Відповідні відношення логічного наслідку для двох формул $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\,|\!=_*\Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_A|\!=_*\Psi$ для кожної моделі мови *A*.

Для класичної логіки *скінченно-арних тотальних однозначних* предикатів відношення $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ збігаються.

Для логік *часткових однозначних* предикатів (неокласична семантика) можна розглядати $|\!=_{Cl}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, відношення $|\!=_{Cm}$ тут порожнє.

Для логік *тотальних неоднозначних* предикатів (пересичена семантика) можна розглядати $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, відношення $|\!=_{Cl}$ порожнє.

Для логік *часткових тотальних неоднозначних* предикатів (загальна семантика) відношення $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ збігаються, відношення $|\!=_{Cl}$ та $|\!=_{Cm}$ порожні.

Відношення еквівалентності $_A\!\sim_T$, $_A\!\sim_F$, $_A\!\sim_{TF}$, $_A\!\sim_{Cl}$, $_A\!\sim_{Cm}$ в моделі мови *A* та відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ визначаємо за схемою:

$\Phi\ {}_A\!\sim_*\Psi$, якщо $\Phi\ {}_A|\!=_*\Psi$ та $\Psi\ {}_A|\!=_*\Phi$;

$\Phi\sim_*\Psi$, якщо $\Phi\,|\!=_*\Psi$ та $\Psi\,|\!=_*\Phi$.

Для кожної *A* маємо: $\Phi\ {}_A\!\sim_{TF}\Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A)=T(\Psi_A)$ та $F(\Psi_A)=F(\Phi_A)$, тобто $\Phi_A=\Psi_A$. Тому $\Phi\sim_{TF}\Psi$ означає, що Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

У відповідних семантиках для $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_{TF}$ справджується теорема семантичної

еквівалентності, водночас [4] для $\sim_T$ та $\sim_F$ вона невірна (тут $*$ – одне з Cl, Cm, TF).

Теорема 2. Нехай формула Ф', отримана з Ф заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1, ..., \Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Поширимо поняття наслідку на множини формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$.

$\Gamma\ _A|=_T \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$.

$\Gamma\ _A|=_F \Delta$, якщо $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$.

$\Gamma\ _A|=_{TF} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ та $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$.

$\Gamma\ _A|=_{Cl} \Delta$, якщо $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

$\Gamma\ _A|=_{Cm} \Delta$, якщо $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) = {}^V A$.

Відношення логічного наслідку для множин формул $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Gamma |=_* \Delta$, якщо $\Gamma\ _A|=_* \Delta$ для кожної моделі мови A.

У відповідних семантиках справджується

Теорема 3 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді маємо:

$\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |=_* \Delta$ та $\Gamma |=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \Psi$.

Тут і надалі, якщо інше окремо не зазначено, $|=_*$ позначає:
– одне із $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$ – для неокласичної семантики;
– одне із $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cm}$ – для пересиченої семантики;
– $|=_{TF}$ – для загальної семантики.

До основних властивостей відношень логічного наслідку для множин формул найперше віднесемо такі:

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma |=_* \Delta \Rightarrow \Lambda |=_* \Sigma$.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma |=_* \Delta$.

Властивість C гарантує наявність кожного із введених логічних наслідків у відповідних семантиках.

Додатково гарантують наявність відповідного логічного наслідку властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma |=_* \Delta$

(для неокласичної семантики $|=_*$ – це $|=_T$ або $|=_{Cl}$; для пересиченої – це $|=_F$ або $|=_{Cm}$);

CR) $\Gamma |=_* \Delta, \Phi, \neg\Phi$

(для неокласичної семантики $|=_*$ – це $|=_F$ або $|=_{Cl}$; для пересиченої – це $|=_T$ або $|=_{Cm}$);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma |=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$ (для неокласичної або для пересиченої семантики).

Для $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$ властивості CL, CR, CLR зводяться до C.

До базових властивостей пропозиційного рівня віднесемо:

$\neg\neg_{|-}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |=_* \Delta$;

$\neg\neg_{-|}$) $\Gamma |=_* \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \Phi$;

$\vee_{|-}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |=_* \Delta$ та $\Psi, \Gamma |=_* \Delta$;

$\vee_{-|}$) $\Gamma |=_* \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_{|-}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |=_* \Delta$;

$\neg\vee_{-|}$) $\Gamma |=_* \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |=_* \Delta, \neg\Psi$.

Для $|=_{Cl}$ (неокласична семантика) та $|=_{Cm}$ (пересичена семантика) також маємо:

$\neg_{|-}$) $\neg\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \Phi$;

$\neg_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_* \Delta$.

Це означає, що для $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ можна знімати зовнішнє заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки. Проте це не можна робити [2], [5] для $\models_T$, $\models_F$ та $\models_{TF}$, для цих наслідків властивості $\neg_{|-}$ та $\neg_{-|}$ невірні.

Наведемо базові властивості реномінативного і кванторного рівнів.

RT$_{|-}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

RT$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$;

$\neg$RT$_{|-}$) $\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$RT$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$;

ΦN$_{|-}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

ΦN$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ (тут $y \in \nu(\Phi)$);

$\neg$ΦN$_{|-}$) $\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$ΦN$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ (тут $y \in \nu(\Phi)$;

RR$_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

RR$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$;

$\neg$RR$_{|-}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$RR$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)$;

R$\neg_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

R$\neg_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$;

$\neg$R$\neg_{|-}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$R$\neg_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$;

R$\vee_{|-}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models_* \Delta$;

R$\vee_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$;

$\neg$R$\vee_{|-}$) $\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi), \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$R$\vee_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$ та $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)$;

R∃R$_{|-}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

R∃R$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$;

R∃p$_{|-}$) $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta$;

R∃p$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi$;

$\neg$R∃R$_{|-}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$R∃R$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\neg\exists x\Phi)$;

$\neg$R∃p$_{|-}$) $R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta$;

$\neg$R∃p$_{-|}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{x}_{y}(\neg\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg\exists x\Phi$.

Властивості елімінації кванторів

Розглянемо властивості, пов'язані з елімінацією кванторів, зокрема, властивості елімінації кванторів під реномінацією. У випадку $\Gamma_A|\!=\Delta$ будемо надалі позначати $\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A)$ як $T(\Gamma_A)$, $\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ як $T(\Delta_A)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$ як $F(\Gamma_A)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A)$ як $F(\Delta_A)$.

Множину тотально (строго) неістотних імен позначаємо V_T.

Теорема 4. При умові $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ маємо:

$R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma|\!=_*\Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma|\!=_*\Delta,\varepsilon z$ (тут $*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Випадок $|\!=_{Cl}$.

Доводимо $\Rightarrow$. Нехай $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma|\!=_{Cl}\Delta$, тоді $T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)=\varnothing$. Згідно з теоремою 1 маємо $T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)\subseteq T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, тому $T(\Gamma_A)\cap F(\Delta_A)\cap$ $\cap T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)=\varnothing$. Отже, $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma|\!=_{Cl}\Delta,\varepsilon z$.

Доводимо $\Leftarrow$. Нехай $R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma|\!=_{Cl}\Delta,\varepsilon z$, звідси $T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)\cap$ $\cap F(\varepsilon z_A)=\varnothing$. Покажемо, що тоді $T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)=\varnothing$, звідки отримаємо $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma|\!=_{Cl}\Delta$. Припустимо супротивне: $T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(\varepsilon z_A)=\varnothing$ та існує $d\in{}^VA$ таке, що $d\in T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)$. Маємо $d\in T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, $d\in T(\Gamma_A)$ та $d\in F(\Delta_A)$. Із умови $d\in T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in T(\exists x\Phi_A)$, звідки $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\in T(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$, тому $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in T(\Phi_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in T(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in F(\Delta_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z\mapsto a\in T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$, за визначенням εz маємо $d\nabla z\mapsto a\in F(\varepsilon z_A)$, тому отримуємо $d\nabla z\mapsto a\in T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(\varepsilon z_A)$, що суперечить нашому припущенню $T(\Gamma_A)\cap T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(\varepsilon z_A)=\varnothing$.

Випадок $|\!=_{Cm}$. Доведення проводиться подібно доведенню для $|\!=_{Cl}$.

Випадок $|\!=_T$. Доводимо $\Rightarrow$. Треба показати:

$T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A) \Rightarrow T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)$.

За теоремою 1 маємо $T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)\subseteq T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, звідси та з умови $T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$ отримуємо: $T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A) \Rightarrow$ $\Rightarrow T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)\cap T(\Gamma_A))\cup T(\varepsilon z_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)\Rightarrow$

$\Rightarrow ((T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A))\cup T(\varepsilon z_A))\cap(F(\varepsilon z_A)\cup T(\varepsilon z_A))\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)$, звідки

$(T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A))\cup T(\varepsilon z_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)\Rightarrow T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A))\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)$.

Доводимо $\Leftarrow$. Треба показати:

$T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)\Rightarrow T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$.

Нехай (1) – це умова $T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(\varepsilon z_A)$. Припустимо супротивне: (1) та невірно $T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$. Із останнього маємо: існує $d\in{}^VA$

таке, що $d \in T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, $d \in T(\Gamma_A)$, $d \notin T(\Delta_A)$. Із умови $d \in T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$ отримуємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a \in T(\Phi_A)$ для деякого $a \in A$. Але $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$, тому маємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a\nabla z \mapsto a \in T(\Phi_A)$, $d\nabla z \mapsto a \in T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, $d\nabla z \mapsto a \in T(\Gamma_A)$, $d\nabla z \mapsto a \notin T(\Delta_A)$. Із першої умови тоді $d\nabla z \mapsto a \in T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$, звідси, враховуючи $d\nabla z \mapsto a \in F(\varepsilon z_A)$, маємо $d\nabla z \mapsto a \in T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cap T(\Gamma_A)$ та $d\nabla z \mapsto a \notin T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A)$. Це суперечить умові $T(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cap T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A)$.

Випадок $|=_F$. Доводимо $\Rightarrow$. Треба показати:

$F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A) \Rightarrow F(\varepsilon z_A) \cap F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$.

За теоремою 1 маємо $F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$, звідси та з умови $F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$ маємо: $F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq (F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)) \cap F(\varepsilon z_A) \Rightarrow$ $\Rightarrow F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq (F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cap F(\varepsilon z_A)) \cup (F(\Gamma_A)) \cap F(\varepsilon z_A))$ $\Rightarrow$ $F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq$ $\subseteq F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cup (F(\Gamma_A)) \cap F(\varepsilon z_A)) \Rightarrow F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$.

Доводимо $\Leftarrow$. Треба показати:

$F(\varepsilon z_A) \cap F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A) \Rightarrow F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$.

Нехай (1) – це умова $F(\varepsilon z_A) \cap F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$. Припустимо супротивне: (1) та невірно $F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$. Із останнього маємо: існує $d \in {}^V\!A$ таке, що $d \in F(\Delta_A)$, $d \notin F(\Gamma_A)$, $d \notin F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$. Із останнього маємо, що для деякого $a \in A$, тоді $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a \notin F(\Phi_A)$. Але $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$, тому $d\nabla z \mapsto a \in F(\Delta_A)$, $d\nabla z \mapsto a \notin F(\Gamma_A)$, $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a\nabla z \mapsto a \notin F(\Phi_A)$. Останнє означає $d\nabla z \mapsto a \notin F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$. Враховуючи $d\nabla z \mapsto a \in F(\varepsilon z_A)$, тоді $d\nabla z \mapsto a \in F(\varepsilon z_A) \cap F(\Delta_A)$ та $d\nabla z \mapsto a \notin F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$. Це суперечить $F(\varepsilon z_A) \cap F(\Delta_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup F(\Gamma_A)$.

Випадок $|=_{TF}$. Доводячи $\Rightarrow$ для $|=_T$ та $|=_F$ так, як описано вище, отримуємо $\Rightarrow$ для $|=_{TF}$. Доводячи $\Leftarrow$ для $|=_T$ та $|=_F$ так, як описано вище, отримуємо $\Leftarrow$ для $|=_{TF}$.

Наслідок 2. При умові $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ маємо:

$\exists x\Phi, \Gamma \,|=_* \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma \,|=_* \Delta, \varepsilon z$ (тут $*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Теорема 5. При умові $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ маємо:

$\Gamma \,|=_* \Delta, \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \,|=_* \Delta, \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon z$.

Тут $*$ може бути T, F, TF; для $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$ в силу $\neg_{|-}$ і $\neg_{-|}$ достатньо теореми 4.

Випадок $|=_T$. Для доведення $\Rightarrow$ треба показати:

$T(\Gamma_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \Rightarrow T(\Gamma_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A)$.

У доведенні $\Rightarrow$ для $|=_F$ теореми 5 замість $F(\Delta_A)$ беремо $T(\Gamma_A)$, замість $F(\Gamma_A)$ беремо $T(\Delta_A)$; маємо $T(\Gamma_A) \subseteq F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \Rightarrow F(\varepsilon z_A) \cap T(\Gamma_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A)$. Використавши теоретико-множинне співвідношення $A \cap F \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cup \overline{F}$, звідси, враховуючи $F(\varepsilon z_A) \cup T(\varepsilon z_A) = {}^V\!A$, отримуємо $T(\Gamma_A) \subseteq F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A)$.

Для доведення $\Leftarrow$ треба показати:

$T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A) \Rightarrow T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(\Delta_A)$.

Використавши теоретико-множинне співвідношення $A \subseteq B \cup \overline{F} \Rightarrow A \cap F \subseteq B$, маємо $T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \cup T(\varepsilon z_A) \Rightarrow F(\varepsilon z_A) \cap T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A)$. У доведенні $\Leftarrow$ для $|=_F$ теореми 5 замість $F(\Delta_A)$ беремо $T(\Gamma_A)$, замість $F(\Gamma_A)$ беремо $T(\Delta_A)$; маємо $T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A) \Rightarrow T(\Gamma_A) \subseteq F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\Delta_A)$. Звідси отримуємо шукане співвідношення.

Випадок $|=_F$. Для доведення $\Rightarrow$ треба показати:

$F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A) \Rightarrow F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$.

За теоремою 1 маємо $TT(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, звідси із умови $F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$ випливає $F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$.

Для доведення $\Leftarrow$ треба показати:

$F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A) \Rightarrow F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$.

Із $F(\Delta_A) \cap F(\varepsilon z_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$, згідно з теоретико-множинним співвідношенням $A \cap F \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cup \overline{F}$, маємо $F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A) \cup T(\varepsilon z_A)$. У доведенні $\Leftarrow$ для $|=_T$ теореми 5 замість $T(\Gamma_A)$ беремо $F(\Delta_A)$, замість $T(\Delta_A)$ беремо $F(\Gamma_A)$; маємо $F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A) \cup T(\varepsilon z_A) \Rightarrow F(\Delta_A) \cap T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$. Звідси отримуємо шукане співвідношення.

Випадок $|=_{TF}$. Доводячи $\Rightarrow$ для $|=_T$ та $|=_F$ так, як описано вище, отримуємо $\Rightarrow$ для $|=_{TF}$. Доводячи $\Leftarrow$ для $|=_T$ та $|=_F$ так, як описано вище, отримуємо $\Leftarrow$ для $|=_{TF}$.

Наслідок 3. При умові $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ маємо:

$\Gamma |=_* \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \neg R^x_z(\Phi), \varepsilon z$ (* може бути T, F, TF).

Теорема 6. При умові $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ маємо:

$\Gamma |=_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (* може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Твердження $\Rightarrow$ вірне згідно з властивістю U. Тому залишається довести $\Leftarrow$.

Наведемо для прикладу доведення для $|=_T$ та $|=_F$.

Випадок $|=_T$. Треба показати:

$T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A) \cup T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\varepsilon z_A) \Rightarrow T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A) \cup T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$.

Нехай (1) – це умова $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A) \cup T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\varepsilon z_A)$. Припустимо супротивне: вірна умова (1) та існує $d \in {}^V\!A$ таке: $d \in T(\Gamma_A)$, $d \notin T(\Delta_A)$, $d \notin T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Але $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ та $z \in V_T$, тому для всіх $a \in A$ маємо $d\nabla z \mapsto a \in T(\Gamma_A)$, $d\nabla z \mapsto a \notin T(\Delta_A)$, $d\nabla z \mapsto a \notin T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Із останнього тоді отримуємо $d\nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a\nabla z \mapsto a \notin T(\Phi_A)$, тому $d\nabla z \mapsto a \notin T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)$. Але $d\nabla z \mapsto a \notin T(\varepsilon z_A)$, звідки отримуємо $d\nabla z \mapsto a \notin T(\Delta_A) \cup T(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cup T(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cup T(\varepsilon z_A)$. При цьому $d\nabla z \mapsto a \in T(\Gamma_A)$, тому маємо суперечність із (1).

Випадок $|=_F$. Треба показати:

$F(\Delta_A) \cap F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap F(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap F(\varepsilon z_A) \subseteq F(\Gamma_A) \Rightarrow F(\Delta_A) \cap F(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \subseteq F(\Gamma_A)$.

Нехай (1) – це умова $F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)\subseteq F(\Gamma_A)$. Припустимо супротивне: вірна умова (1) та існує $d\in{}^VA$ таке: $d\in F(\Delta_A)$, $d\in F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, $d\notin F(\Gamma_A)$. Але $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ та $z\in V_T$, тому для всіх $a\in A$ маємо $d\nabla z\mapsto a\in F(\Delta_A)$, $d\nabla z\mapsto a\notin F(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$. Із умови $d\nabla z\mapsto a\in F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$ отримуємо $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in F(\Phi_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$. Але $d\nabla z\mapsto a\in F(\varepsilon z_A)$, звідки отримуємо $d\nabla z\mapsto a\in F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon z_A)$. При цьому $d\nabla z\mapsto a\notin F(\Gamma_A)$, тому маємо суперечність із (1).

Наслідок 4. При умові $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$ маємо:

$\Gamma\models_*\Delta,\exists x\Phi\Leftrightarrow\Gamma\models_*\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi),\varepsilon z$ ($*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Подібним чином доводяться теореми 7 – 9 та їх наслідки.

Теорема 7. При умові $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ маємо:

$\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma\models_*\Delta\Leftrightarrow\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon z$ ($*$ може бути T, F, TF).

Наслідок 5. При умові $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$ маємо:

$\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_*\Delta\Leftrightarrow\neg\exists x\Phi,\neg R_z^x(\Phi),\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon z$ ($*$ може бути T, F, TF).

Теорема 8. $\Gamma\models_*\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\varepsilon y\Leftrightarrow\Gamma\models_*\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y$ ($*$може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Наслідок 6. $\Gamma\models_*\Delta,\exists x\Phi,\varepsilon y\Leftrightarrow\Gamma\models_*\Delta,\exists x\Phi,R_y^x(\Phi),\varepsilon y$ ($*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Теорема 9. $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon y\Leftrightarrow\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon y$ ($*$ може бути T, F, TF).

Наслідок 7. $\neg\exists x\Phi,\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon y\Leftrightarrow\neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\Gamma\models_*\Delta,\varepsilon y$ ($*$ може бути T, F, TF).

Теорема 10. $\Gamma\models_*\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\varepsilon y,\Gamma\models_*\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma\models_*\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\ R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y$ ($*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Твердження $\Rightarrow$ вірне згідно з властивістю U. Тому залишається довести $\Leftarrow$.

Випадок $\models_{Cl}$. Припустимо супротивне: $\Gamma\models_{Cl}\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y$ та $\varepsilon y,\Gamma\models_{Cl}\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ проте $\Gamma\not\models_{Cl}\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$. Тоді $T(\Gamma_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\neq\varnothing$, звідки існує $d\in{}^VA$ таке, що $d\in T(\Gamma_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$.

Можливі 2 випадки: $d(y)\uparrow$ та $d(y)\downarrow$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $d\in T(\varepsilon y_A)$, звідки $d\in T(\varepsilon y)\cap\cap T(\Gamma_A)\cap F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$, що суперечить умові $\varepsilon y,\Gamma\models_{Cl}\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$. Якщо $d(y)\downarrow$, то $d\in F(\varepsilon y_A)$; нехай $d(y)=a$. Із $d\in F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$ тоді $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\in F(\exists x\Phi_A)$. Звідси $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto b\in F(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, це вірно і для $d(y)=a$, тому $d\nabla\bar{u}\mapsto d(\bar{v})\nabla x\mapsto d(y)\in F(\Phi_A)$, звідки $d\in F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)$. Отже, $d\in T(\Gamma_A)\cap F(\Delta_A)\cap\cap F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cap F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cap F(\varepsilon y_A)$, що суперечить $\Gamma\models_{Cl}\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y$.

Випадок $\models_{Cm}$. Доведення проводиться подібно доведенню для $\models_{Cl}$.

Випадок $\models_T$. Покажемо: $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\cup T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)_A)\cup T(\varepsilon y_A)$ та $T(\varepsilon y_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)\Rightarrow T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)_A)$.

Позначимо (1) та (2) умови $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\cup T(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)_A)\cup T(\varepsilon y_A)$ та $T(\varepsilon y_A)\cap T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)\cup T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$. Припустимо супротивне: вірні (1) та (2), водночас існує $d\in{}^VA$ таке: $d\in T(\Gamma_A)$, $d\notin T(\Delta_A)$, $d\notin T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$. Можливі 2 випадки: $d\in T(\varepsilon y_A)$ та $d\notin T(\varepsilon y_A)$.

Якщо $d\in T(\varepsilon y_A)$, то маємо $d\in T(\varepsilon y_A)\cap T(\Gamma_A)$; проте $d\notin T(\Delta_A)$ та $d\notin T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$, тому отримуємо суперечність з (2).

Якщо $d\notin T(\varepsilon y_A)$, то, враховуючи $d\in T(\Gamma_A)$, $d\notin T(\Delta_A)$ та $d\notin T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$, із (1) негайно випливає $d\in T(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)_A)$, що дає $d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto d(y)\in T(\Phi_A)$. Із $d\notin T(\varepsilon y_A)$ маємо $d\in F(\varepsilon y_A)$, тому $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, звідки отримуємо $d\nabla\bar u\mapsto d(\bar v)\nabla x\mapsto a\in T(\Phi_A)$. Це дає $d\in T(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$ – суперечність припущенню.

Випадок $|=_F$. Покажемо: $F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\varepsilon y_A)\subseteq F(\Gamma_A)$ та $F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\subseteq F(\Gamma_A)\cup F(\varepsilon y_A)\Rightarrow F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\subseteq F(\Gamma_A)$.

За теоремою 1 маємо $F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\varepsilon y_A)\subseteq F(R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi)_A)$, тому перша умова набуває вигляду $F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\varepsilon y_A)\subseteq F(\Gamma_A)$, позначимо її (1). Позначимо (2) умову $F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\subseteq F(\Gamma_A)\cup F(\varepsilon y_A)$. Припустимо супротивне: вірні (1) та (2), водночас існує $d\in{}^VA$ таке: $d\in F(\Delta_A)$, $d\in(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$, $d\notin F(\Gamma_A)$. Можливі 2 випадки: $d\in F(\varepsilon y_A)$ та $d\notin F(\varepsilon y_A)$.

Якщо $d\notin F(\varepsilon y_A)$, то згідно з $d\notin F(\Gamma_A)$ маємо $d\notin F(\Gamma_A)\cup F(\varepsilon y)$. Проте $d\in F(\Delta_A)$ та $d\in F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)$, тому отримуємо суперечність з (2).

Якщо $d\in F(\varepsilon y_A)$, то маємо $d\in F(\Delta_A)\cap F(R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)_A)\cap F(\varepsilon y_A)$; водночас $d\notin F(\Gamma_A)$, тому отримуємо суперечність з (1).

Наслідок 8. $\Gamma|=_*\Delta,\exists x\Phi\Leftrightarrow\varepsilon y,\Gamma|=_*\Delta,\exists x\Phi$ та $\Gamma|=\Delta,\exists x\Phi,R_y^x(\Phi),\varepsilon y.$

(тут $*$ може бути Cl, Cm, T, F, TF).

Подібним чином доводяться теорема 11 та її наслідок.

Теорема 11. $\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),\Gamma|=_*\Delta\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\varepsilon y,\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),\Gamma|=_*\Delta$ та $\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar v,y}^{\bar u,x}(\Phi),\Gamma|=_*\Delta,\varepsilon y$ ($*$ може бути T, F, TF).

Наслідок 9. $\neg\exists x\Phi,\Gamma|=_*\Delta\Leftrightarrow\varepsilon y,\neg\exists x\Phi,\Gamma|=_*\Delta$ та $\neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\Gamma|=_*\Delta,\varepsilon y.$

($*$ може бути T, F, TF).

На основі теорем 4 – 11 та наслідків 2 – 9 маємо властивості елімінації кванторів:

$\exists R_{|-}$) $R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),\Gamma|=_*\Delta\Leftrightarrow R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(\Phi),\Gamma|=_*\Delta,\varepsilon z;$

$\exists_{|-}$) $\exists x\Phi,\Gamma|=_*\Delta\Leftrightarrow R_z^x(\Phi),\Gamma|=_*\Delta,\varepsilon z;$

$\neg\exists R_{-|}$) $\Gamma|=_*\Delta,\neg R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma|=_*\Delta,\neg R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(\Phi),\varepsilon z;$

$\neg\exists_{-|}$) $\Gamma|=_*\Delta,\neg\exists x\Phi\Leftrightarrow\Gamma|=_*\Delta,\neg R_z^x(\Phi),\varepsilon z;$

$\exists Rf_{-|}$) $\Gamma|=_*\Delta,R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi)\Leftrightarrow\Gamma|=_*\Delta,R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),\ R_{\bar v}^{\bar u}(\exists x\Phi),R_{\bar v,z}^{\bar u,x}(\Phi),\varepsilon z;$

$\exists f_{-|}$) $\Gamma|=_*\Delta,\exists x\Phi\Leftrightarrow\Gamma|=_*\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi),\varepsilon z;$

$\neg\exists\text{Rf}_{|-})\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon z;$

$\neg\exists\text{f}_{|-})\ \neg\exists x\Phi,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi,\neg R_z^x(\Phi),\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon z.$

Для властивостей $\exists\text{R}_{|-}$, $\neg\exists\text{R}_{-|}$, $\exists\text{Rf}_{-|}$, $\neg\exists\text{Rf}_{|-}$ умови: $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$; для властивостей $\exists_{|-}$, $\neg\exists_{-|}$, $\exists\text{f}_{-|}$, $\neg\exists\text{f}_{|-}$ умови: $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi))$.

$\exists\text{Rv}_{-|})\ \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y;$

$\exists\text{v}_{-|})\ \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi,\varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi),\varepsilon y;$

$\neg\exists\text{Rv}_{|-})\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y \Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y;$

$\neg\exists\text{v}_{|-})\ \neg\exists x\Phi,\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y;$

$\exists\text{Rd}_{-|})\ \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y,\Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\varepsilon y;$

$\exists\text{d}_{-|})\ \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \varepsilon y,\Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi),\varepsilon y;$

$\neg\exists\text{Rd}_{|-})\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon y,\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta$ та $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y;$

$\neg\exists\text{d}_{|-})\ \neg\exists x\Phi,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y,\neg\exists x\Phi,\Gamma \models_* \Delta$ та $\neg\exists x\Phi,\neg R_y^x(\Phi),\Gamma \models_* \Delta,\varepsilon y.$

Висновки

У роботі досліджено властивості відношень логічного наслідку для множин формул у чистих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Основна увага приділена вивченню властивостей цих відношень, пов'язаних з елімінацією кванторів. Для опису таких властивостей використано спеціальні предикати, які визначають наявність значення для змінних. Використання цих предикатів-індикаторів є характерною особливістю проведеного дослідження.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для зазначених логік відповідних числень секвенційного типу.

Література

1. Eds. Abramsky S. Handbook of Logic in Computer Science: in 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994 – 2000.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1 – С. 15-38.
4. Шкильняк С.С. Логики квазиарных предикатов первого порядка / С.С. Шкильняк // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6 – С. 32-49.
5. Нікітченко М.С. Першопорядкові композиційно-номінативні логіки / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 176-185.
6. Шкильняк С.С. Логічний наслідок та його формалізації в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкільняк // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 307-319.
7. Nikitchenko M. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics / M. Nikitchenko, V. Tymofieiev // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – V. 347. – P. 89-110.

Literature

1. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994–2000.

2. Nikitchenko M.S. Matematychna lohika ta teoria algorytmiv. K.: VPC Kyivskyi universytet, 2008. – 528 p.
3. Shkilniak S.S. Vidnoshennia lohichnogo naslidku v komposytsijno-nominatyvnyh lohikah. Probl. programuvannia. 2010. № 1. S. 15–38.
4. Shkilniak S.S. Kibernetika i systemnyi analiz. 2010. № 6. S. 32-49.
5. Nikitchenko M.S. Visnyk Kyiv. un-tu. Ser.: phiz.-mat. nauky. 2011. Vyp. 4. S. 176-185.
6. Shkilniak S.S. Shtucznyj intelekt. 2012. № 1. S. 307-319.
7. Nikitchenko M. Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics / M. Nikitchenko, V. Tymofieiev // Comm. in Comp. and Inf. Science. Vol. 0137. Springer, 2012.

RESUME

S.S. Shkilniak

Properties of Logical Consequence Relations in Logics of Quasi-Ary Predicates

The apparatus of mathematical logic is effective in solving the wide range of problems in computer science and programming. Various logical systems are usually based on classical predicate logic. However, fundamental restrictions of classical logic make necessary introducing of new program-oriented formalisms. Composition-nominative approach is common for logic and programming, therefore it is a natural basis for construction of such a formalism – composition-nominative logics (CNL).

Logical consequence is the central concept of logic. We define the following relations of logical consequence: «true-valued» $|=_T$, «false-valued» $|=_F$, «strong» $|=_{TF}$, «irrefutable» $|=_{Cl}$, and «saturated» $|=_{Cm}$.

In this paper logical consequence relations for sets of formulas for pure first-order CNL of partial single-valued, total and partial multiple-valued predicates are studied. We focus on the properties of the relations concerned with quantifier elimination. The characteristic feature of this work is using of the special variable definedness predicates εz for description of such properties.

We obtained the properties of quantifier elimination under renomination $\exists R_{\vdash}$, $\neg\exists R_{\dashv}$, $\exists Rf_{\dashv}$, $\neg\exists Rf_{\vdash}$, $\exists Rv_{\dashv}$, $\neg\exists Rv_{\vdash}$, $\exists Rd_{\dashv}$, $\neg\exists Rd_{\vdash}$ and of exterior quantifiers $\exists_{\vdash}$, $\neg\exists_{\dashv}$, $\exists f_{\dashv}$, $\neg\exists f_{\vdash}$, $\exists v_{\dashv}$, $\neg\exists v_{\vdash}$, $\exists d_{\dashv}$, $\neg\exists d_{\vdash}$. As an example here are some of them (asterisk $*$ substitutes any of Cl, Cm, T, F, TF).

$$\exists R_{\vdash})\ R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon z \ \ (z \in V_T \text{ and } z \notin nm(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)));$$

$$\exists Rv_{\dashv})\ \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \Gamma, \varepsilon y.$$

$$\neg\exists Rv_{\vdash})\ \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi),\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi),\Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y;$$

$$\exists Rd_{\dashv})\ \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \text{ and } \Gamma \models_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), \varepsilon y.$$

$$\neg\exists_{\dashv})\ \Gamma \models_* \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R_z^x(\Phi), \varepsilon z \ \ (z \in V_T \text{ and } z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi));$$

$$\neg\exists d_{\vdash})\ \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta \text{ and } \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), \Gamma \models_* \Delta, \varepsilon y.$$

The properties of logical consequence relations for sets of formulas are a semantic basis for construction of corresponding sequent calculi for first-order CNL.

Стаття надійшла до редакції 13.11.2012.